

二 电场强度

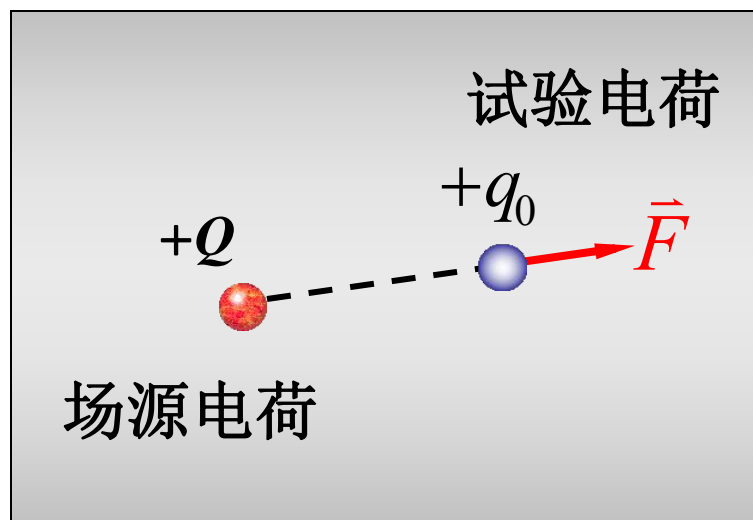
1 试验电荷

◆ 点电荷

◆ 电荷足够小

2 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

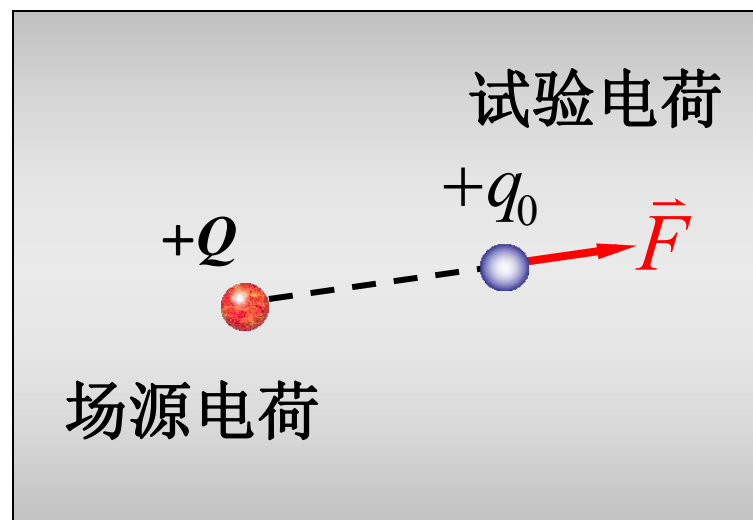
◆ 定义：单位正试验电荷所受的电场力

◆ 单位： $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}, \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$

◆ 和试验电荷无关

◆ 电荷 q 受电场力：

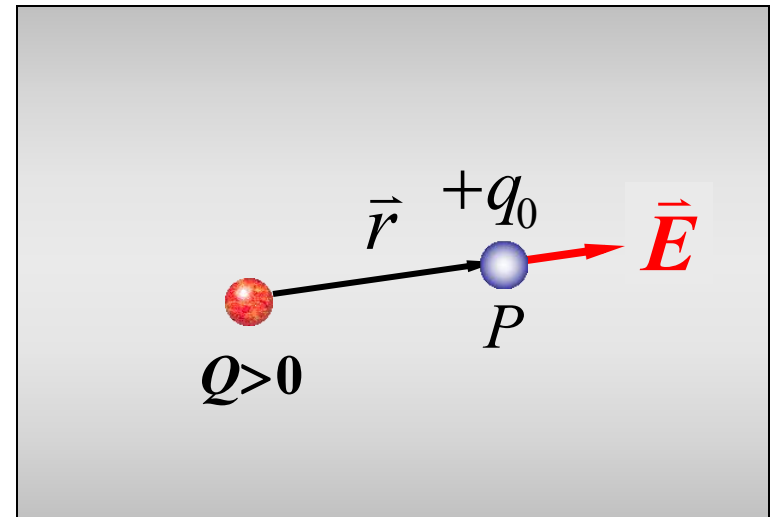
$$\vec{F} = q \vec{E}$$



三 点电荷电场强度

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} \vec{r}^0 \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}^0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



四 电场强度叠加原理

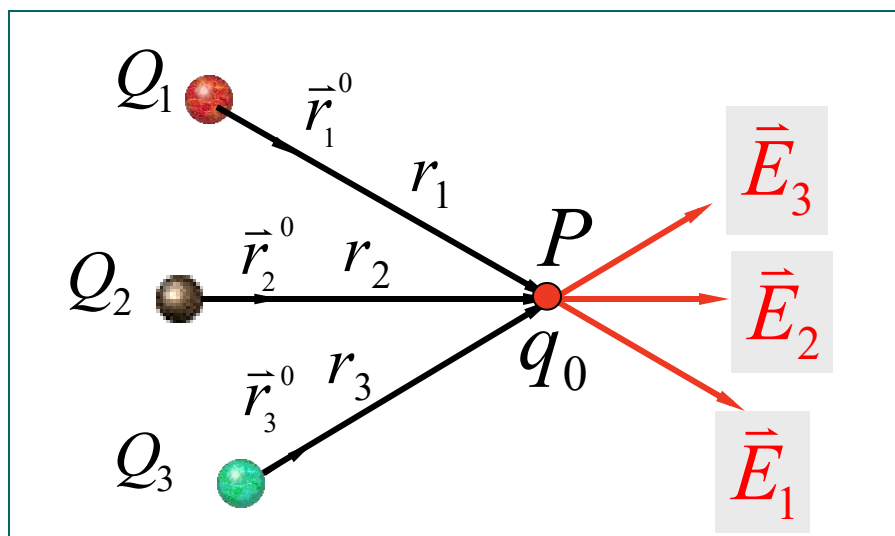
◆ 点电荷系的电场

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q_0}$$

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$



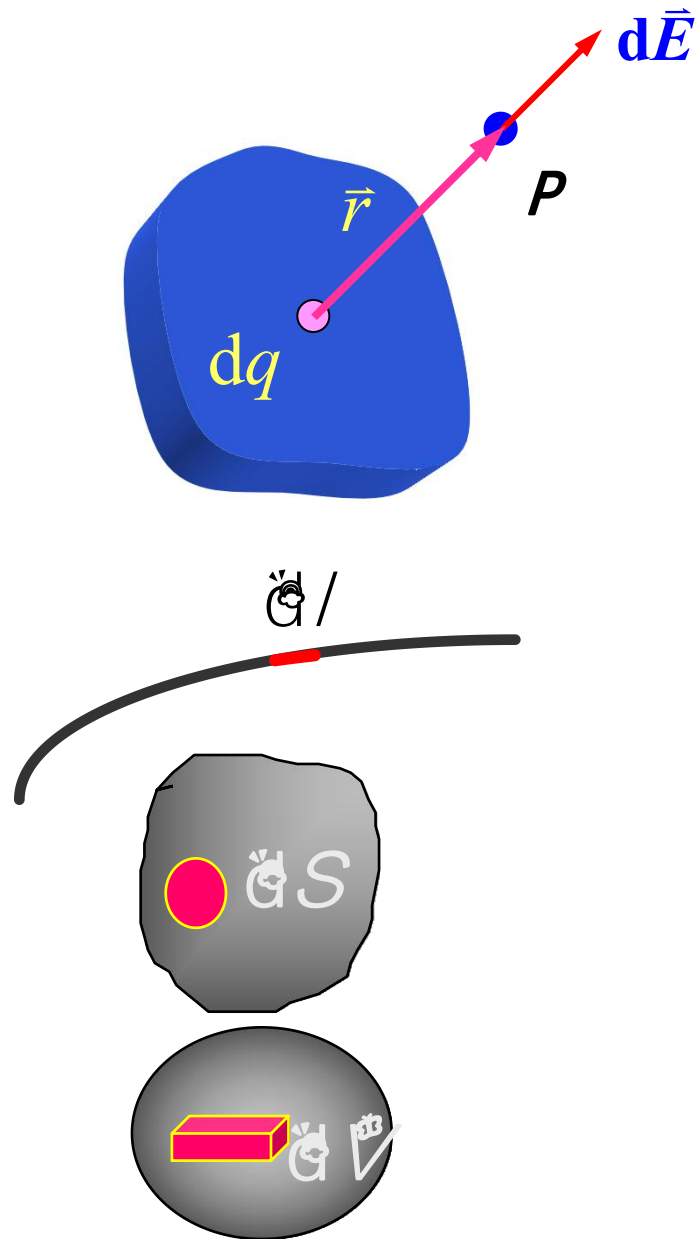
点电荷系在某点 P 产生的电场强度等于各点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。这称为**电场强度叠加原理**。

连续分布带电体

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}^0$$

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0$$

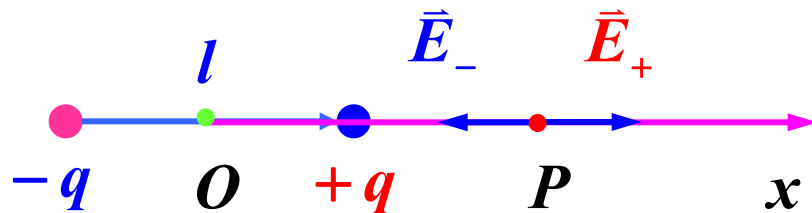
$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{线分布}) \quad \lambda: \text{线密度} \\ \sigma dS & (\text{面分布}) \quad \sigma: \text{面密度} \\ \rho dV & (\text{体分布}) \quad \rho: \text{体密度} \end{cases}$$



例 求电偶极子在延长线上和中垂线上一点产生的电场强度。

定义电偶极矩为： $\vec{p} = q\vec{l}$

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x-l/2)^2}\vec{i}$$



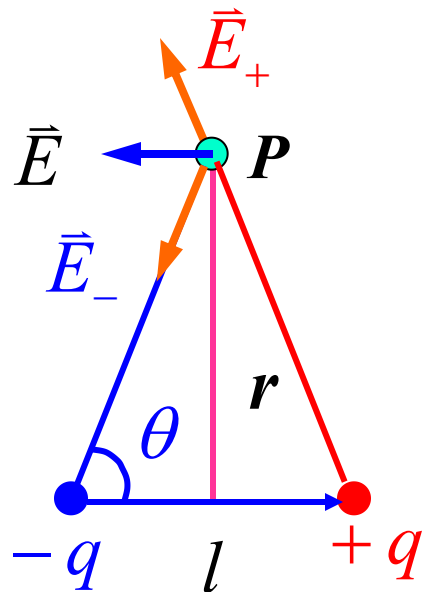
$$\vec{E}_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(x+l/2)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q \cdot 2xl}{4\pi\epsilon_0(x^2 - l^2/4)^2}\vec{i}$$

$$= \frac{2x\vec{p}}{4\pi\epsilon_0(x^2 - l^2/4)^2}$$

电偶极子中垂线上距离中心较远处一点的场强，如图所示

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + l^2/4)}$$



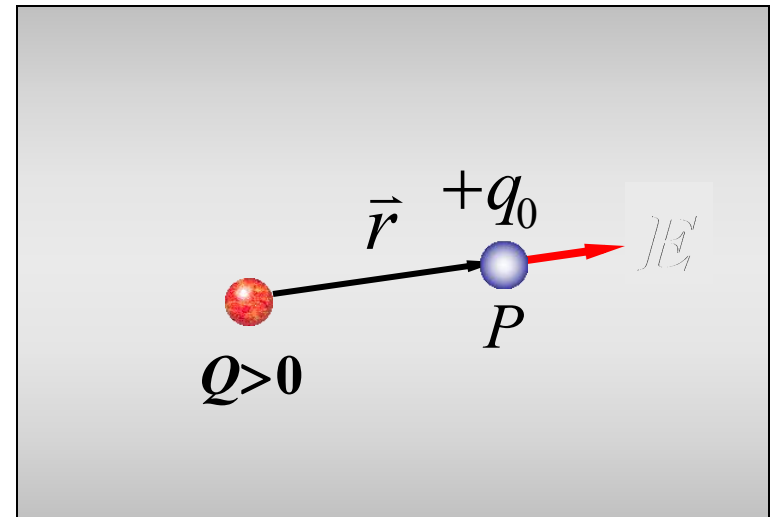
$$E = 2E_+ \cos \theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \quad (l \ll r)$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3} \quad (l \ll r)$$

三 点电荷电场强度

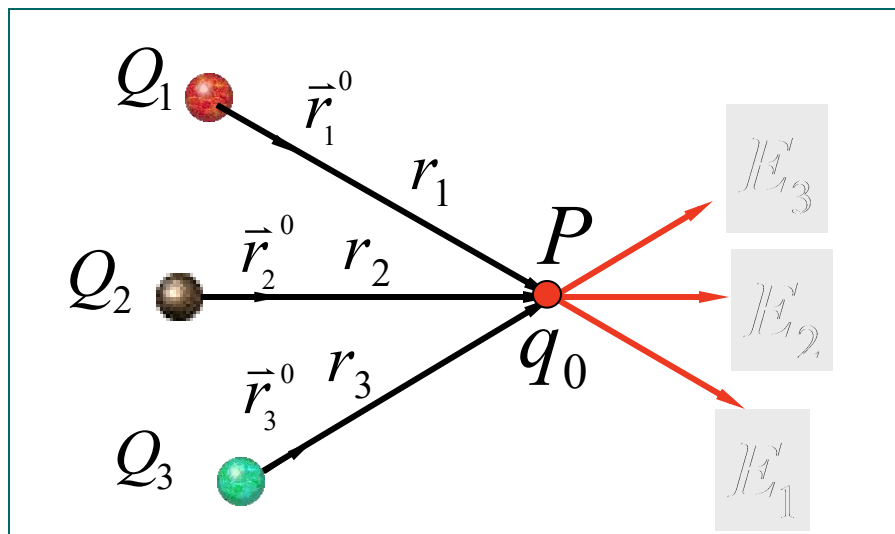
$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^2} \vec{r}^0 \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{r}^0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$



◆ 点电荷系的电场

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$



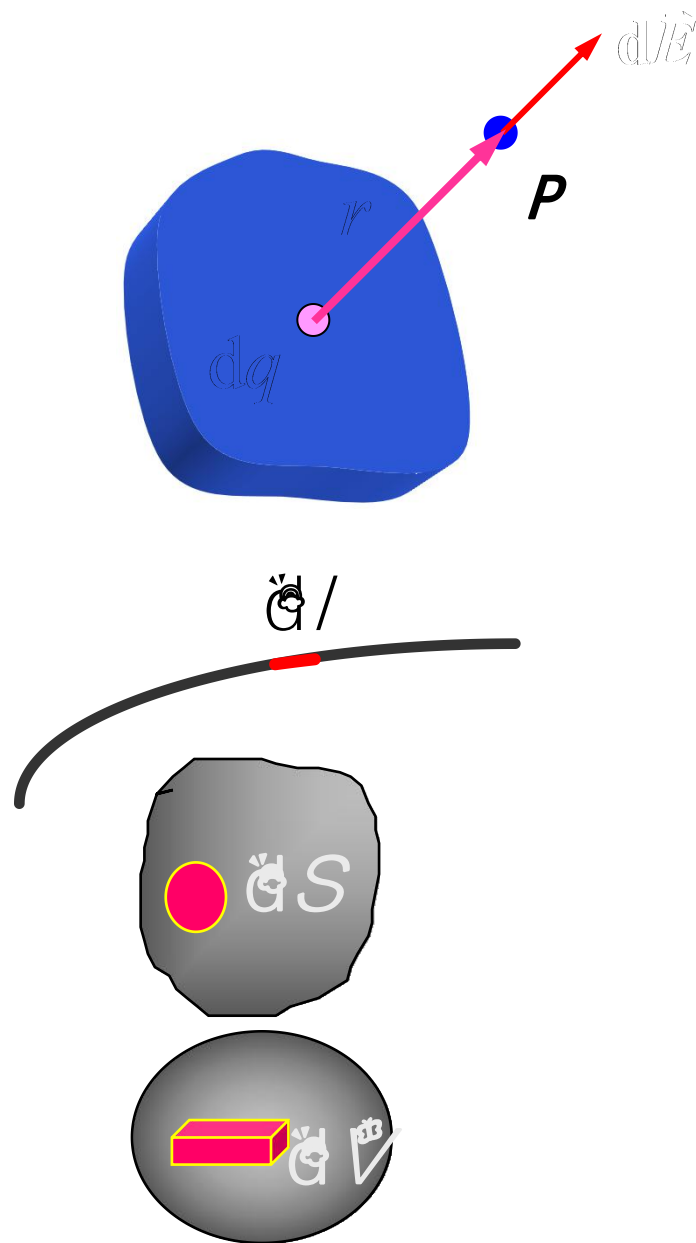
点电荷系在某点 P 产生的电场强度等于各点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。这称为**电场强度叠加原理**。

连续分布带电体

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}^0$$

$$\vec{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0$$

$$dq = \begin{cases} \lambda dl & (\text{线分布}) & \lambda: \text{线密度} \\ \sigma dS & (\text{面分布}) & \sigma: \text{面密度} \\ \rho dV & (\text{体分布}) & \rho: \text{体密度} \end{cases}$$



例 长为 L 的均匀带电直杆，电荷线密度为 λ

求 它在空间一点 P 产生的电场强度（ P 点到杆的垂直距离为 a ）

解 $dq = \lambda dx$ $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2}$

$$dE_x = dE \cos \theta \quad dE_y = dE \sin \theta$$

由图上的几何关系

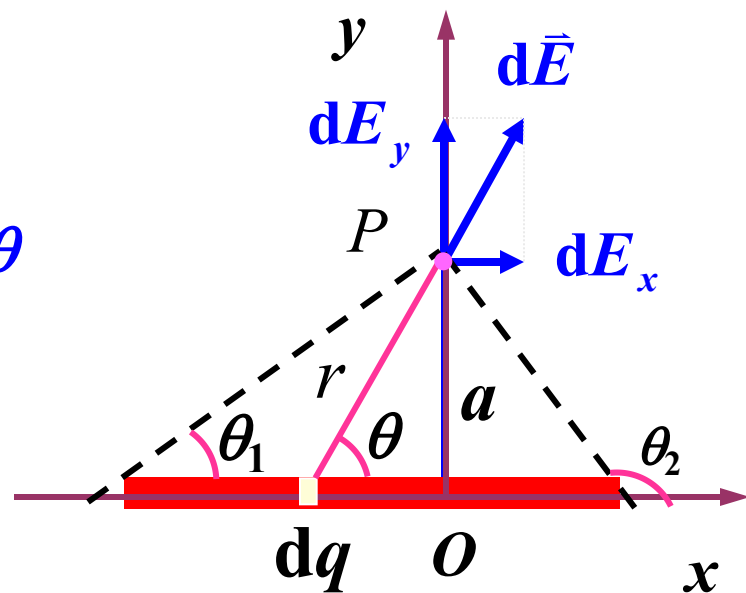
$$x = a \tan\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cot \theta$$

$$dx = a \csc^2 \theta d\theta$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta$$

$$r^2 = a^2 + x^2 = a^2 \csc^2 \theta$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta d\theta$$



$$E_x = \int dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$



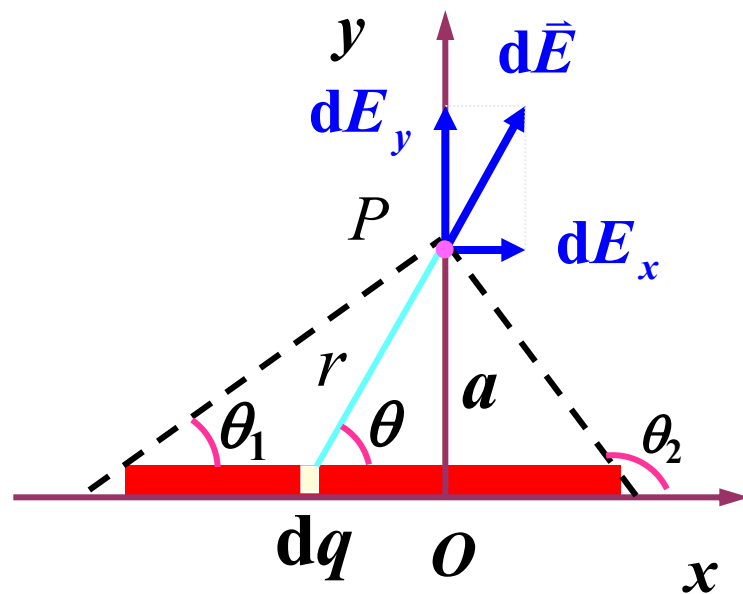
讨论

(1) $a \gg L$ 杆可以看成点电荷

$$E_x = 0 \quad E_y = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

(2) 无限长直导线

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \end{array} \right.$$



例 半径为 R 的均匀带电细圆环，带电量为 q
求 圆环轴线上任一点 P 的电场强度

解 $dq = \lambda dl$ $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}_0$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{r}_0$$

$$dE_{\perp} = dE \sin \theta$$

$$dE_x = dE \cos \theta$$

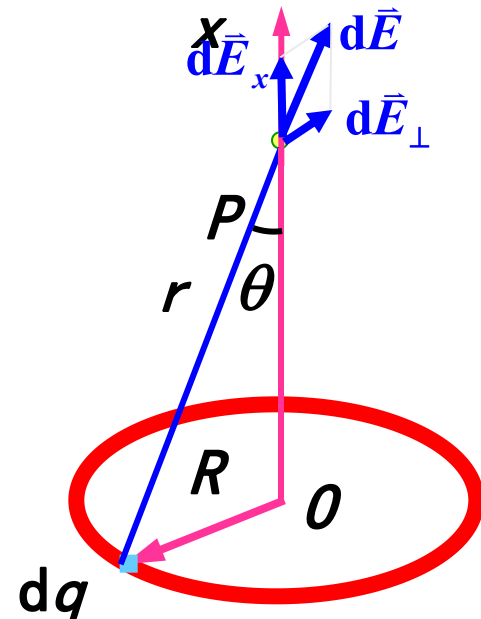
圆环上电荷分布关于 x 轴对称 $E_{\perp} = 0$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$r = (R^2 + x^2)^{1/2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$





讨论

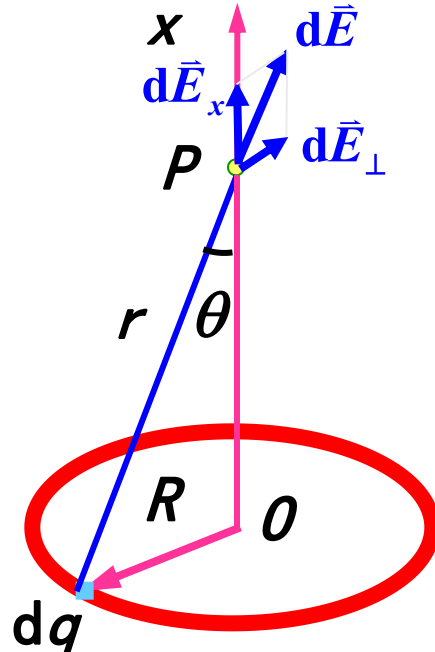
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

(1) 当 $x = 0$ (即 P 点在圆环中心处) 时,

$$E = 0$$

(2) 当 $x \gg R$ 时 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$

可以把带电圆环视为一个点电荷



例 面密度为 σ 的圆板在轴线上任一点的电场强度

解

$$dq = \sigma 2\pi r dr$$

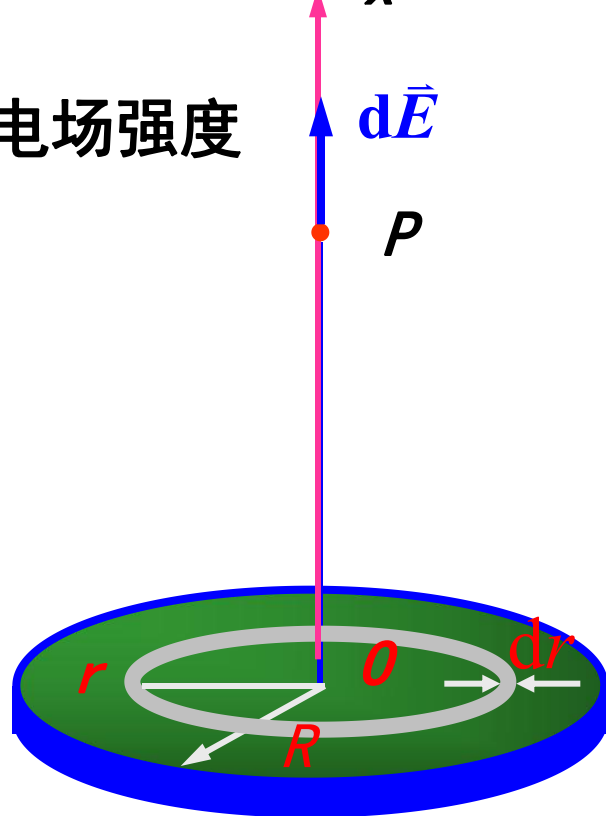
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x dq}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

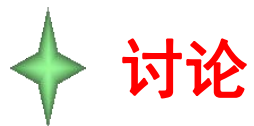
$$E = \int dE = \frac{x\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$



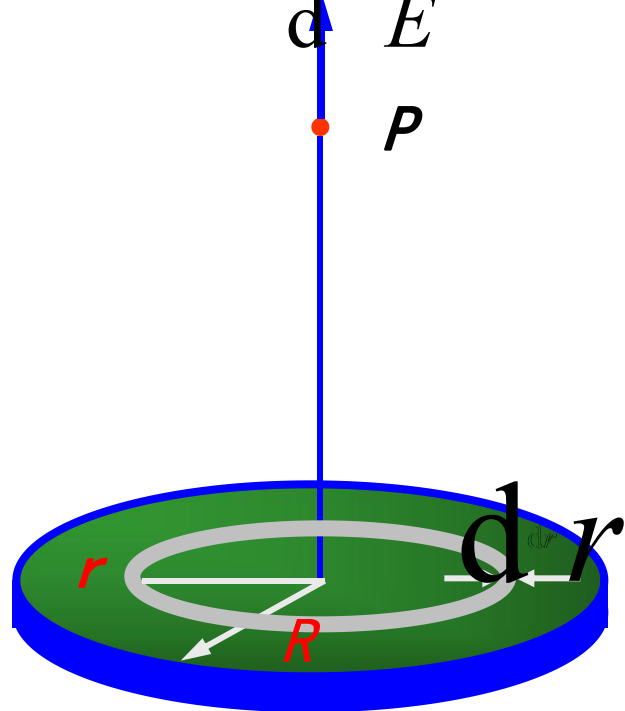
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$



讨论

当 $R \gg x$, 圆板可视为无限大薄板

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

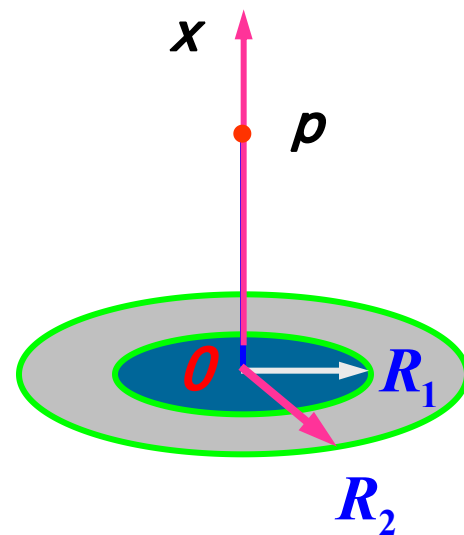
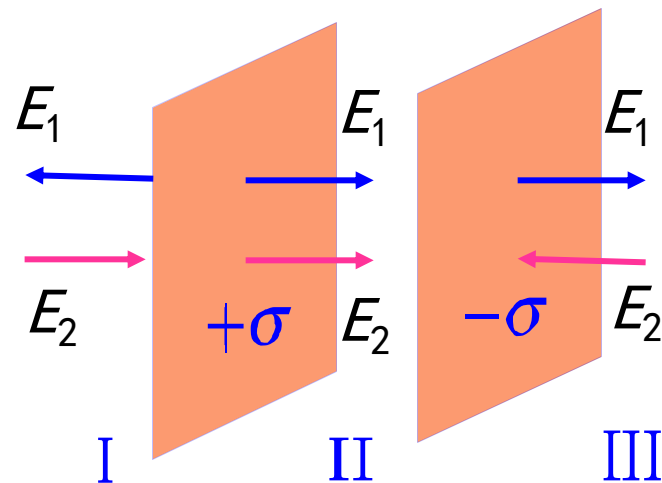
例 $E_{\text{I}} = E_1 - E_2 = 0$

$$E_{\text{II}} = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_{\text{III}} = E_1 - E_2 = 0$$

例 补偿法

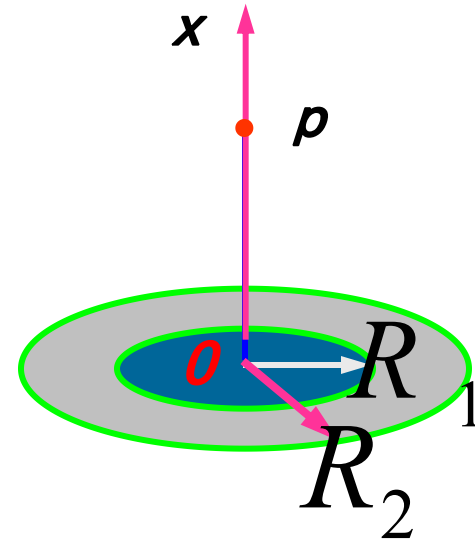
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_{R2} - \vec{E}_{R1} \\ &= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}\end{aligned}$$



例 补偿法

$$\vec{E} = \vec{E}_{R2} - \vec{E}_{R1}$$

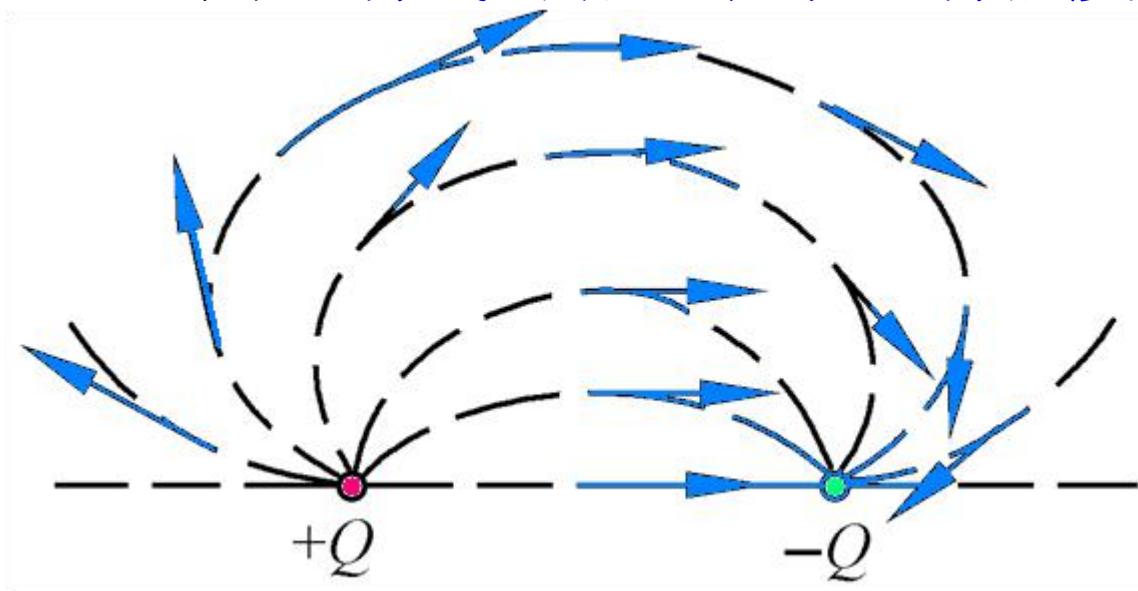
$$= \frac{x\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}} \right] \vec{i}$$



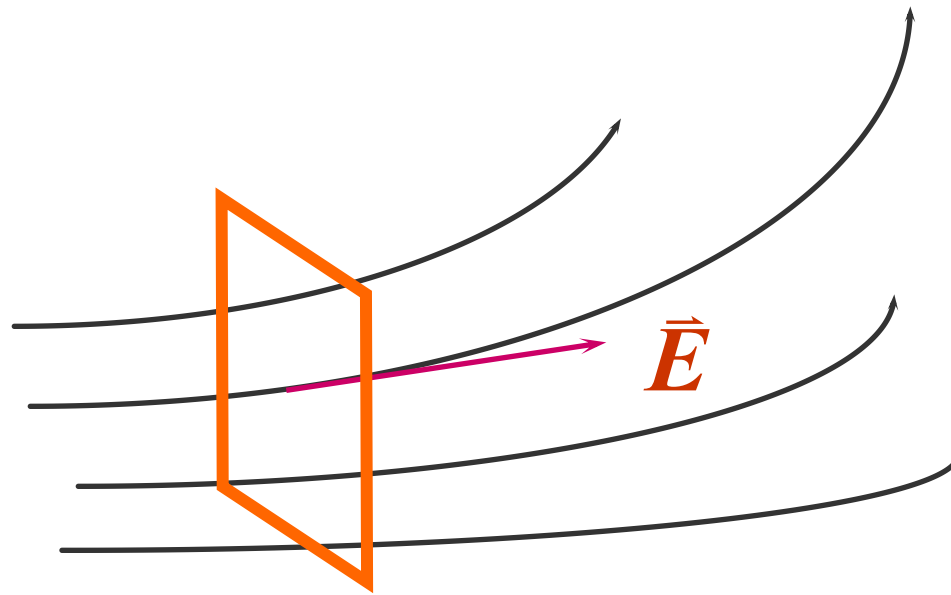
一、电场线

在电场中画一组有方向的曲线，来形象的描述电场在空间的分布，这一组曲线称为**电场线**。

规定： 1) 曲线上每一点**切线方向**为该点**电场强度方向**；
2) 用**电场线的疏密**表示**电场强度的大小**。



通过垂直于电场方向单位面积电场线数（电场线密度）为该点电场强度的大小。



$$E = \frac{dN}{dS_{\perp}}$$

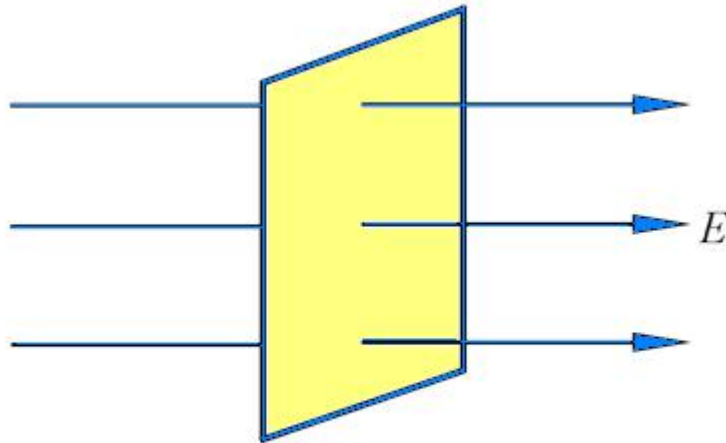
电场线特性:

- 1) 始于正电荷，止于负电荷(或来自无穷远，去向无穷远)，静电场电场线**不闭合**。
- 2) 某点的场强大小与该点电场线密度成正比，电场线密度为与电场线垂直的单位面积上的电场线条数 $dN/dS_{\perp}$ 。
- 3) 两条电场线在没有电荷存在的空间不相交。

二、电通量

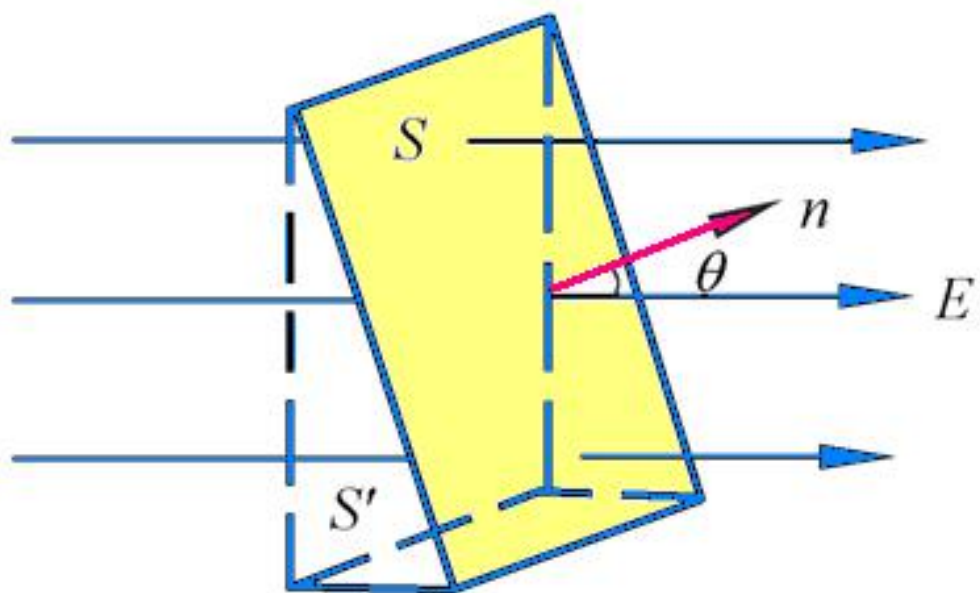
定义：通过电场中任一面积的电场线数目叫做通过该面的电通量。

1. 在匀强电场中通过平面S的电通量



(a) 平面 S 与 E 垂直

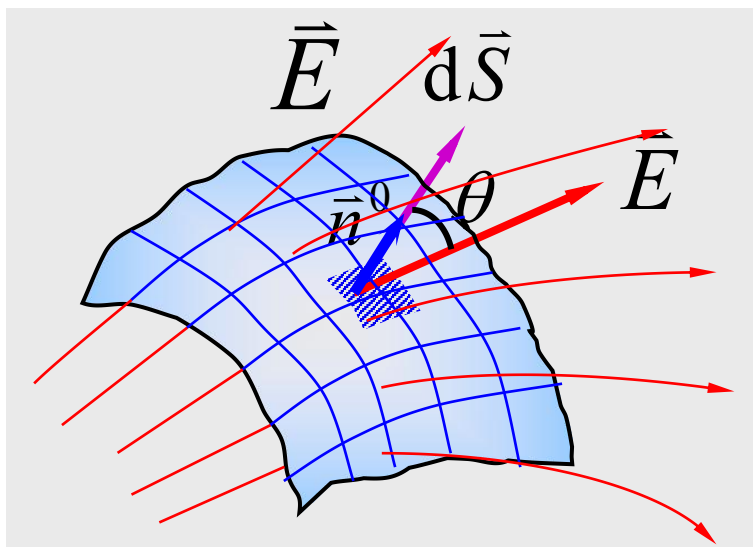
$$\Phi_e = ES$$



(b) 平面 S 的法向 n° 与 E 成 θ 角

$$\Phi_e = ES \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

2 在任意电场中通过任意曲面S的电通量



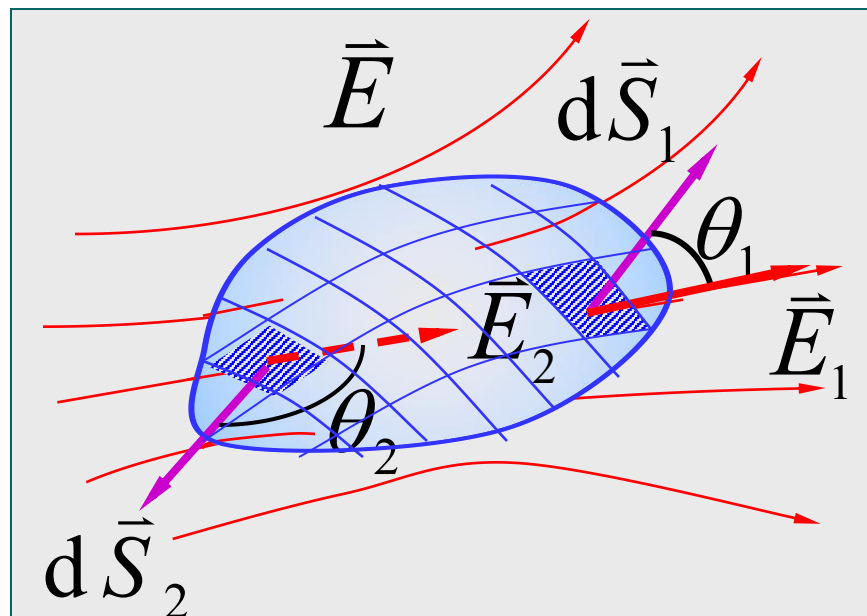
$$\begin{aligned}d\Phi_e &= \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= E \cos \theta dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \int d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_S E \cos \theta dS\end{aligned}$$

3 闭合曲面的电通量

$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad d\Phi_{e1} > 0$$

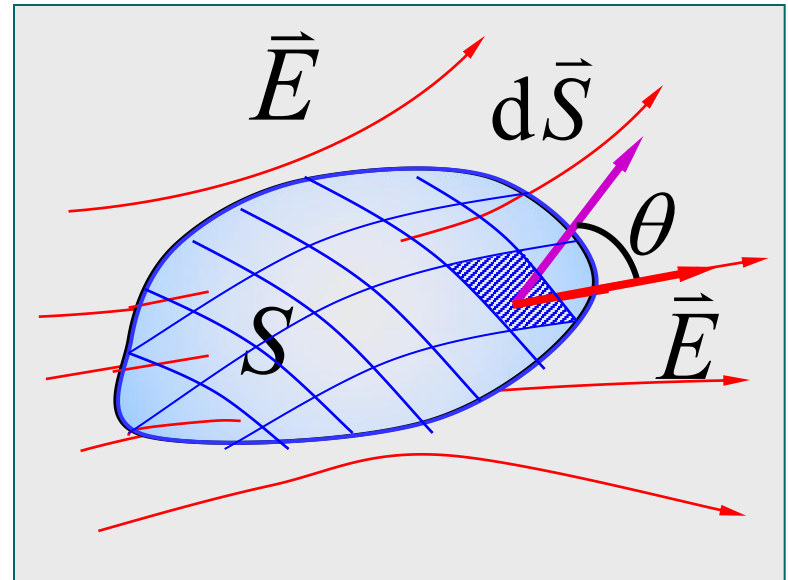
$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad d\Phi_{e2} < 0$$



◆ 闭合曲面的电场强度通量

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cos \theta dS$$



三 高斯定理

高斯 (C.F.Gauss 1777–1855)



德国数学家、天文学家和物理学家，有“数学王子”美称，他与韦伯制成了第一台有线电报机和建立了地磁观测台，高斯还创立了电磁量的绝对单位制。

三、高斯定理

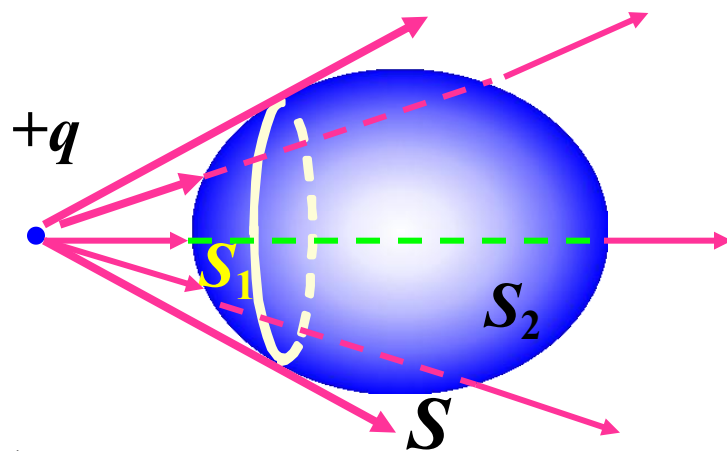
描述：穿过静电场中任一闭合面的电通量 Φ_e ，等于包围在该闭合面**内**所有电荷之代数和 $\sum_i q_i$ 的 $\frac{1}{\epsilon_0}$ 倍，而与闭合面外的电荷无关。这一结论称为**真空中静电场的高斯定理**

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}$$

q 在曲面外时：

$$\Phi_e = 0$$

问题：高斯面上 $\vec{E}$ 与那些电荷有关？





总 结

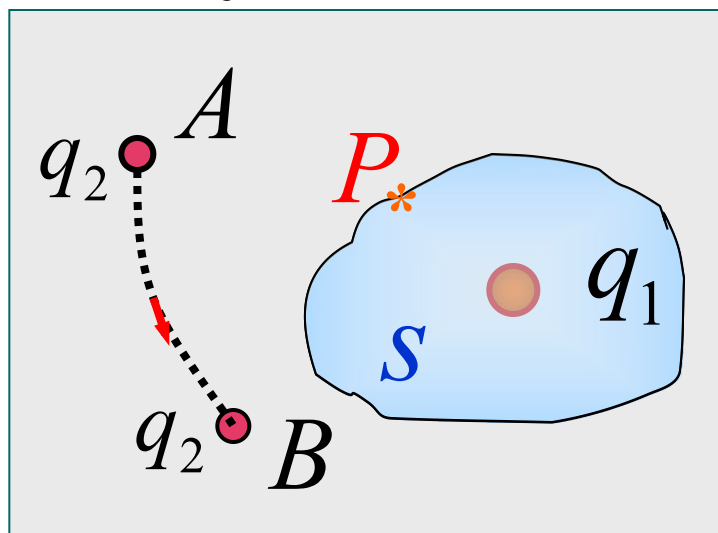
- 1) 高斯面上的电场强度为**所有**内外电荷的总电场强度.
- 2) 高斯面为封闭曲面.
- 3) 穿进高斯面的电场强度通量为负，穿出为正.
- 4) 仅高斯面**内**的电荷对高斯面的电场强度**通量**有贡献.

讨论

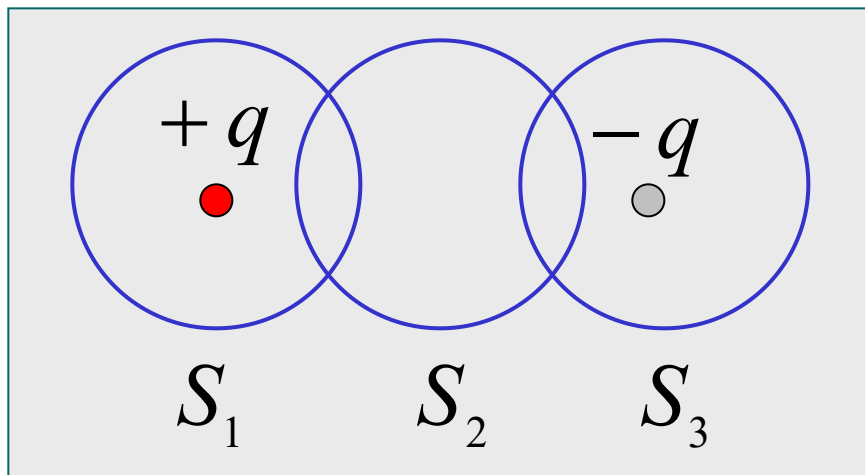
◆ 将 q_2 从 A 移到 B

点 P 电场强度是否变化?

穿过高斯面 S 的 Φ_e 有否变化?



◆ 在点电荷 $+q$ 和 $-q$ 的静电场中，做如下的三个闭合面 S_1, S_2, S_3 ，求通过各闭合面的电通量。



$$\Phi_{e1} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

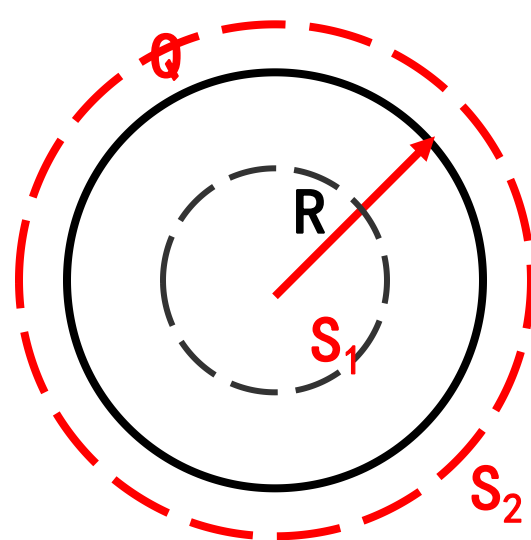
$$\Phi_{e2} = 0$$

$$\Phi_{e3} = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

高斯定理的应用

例 均匀带电球壳的电场强度

解：由于电荷均匀分布，电场强度也将成球面对称，因此电场强度方向均沿径矢。



对于球面内部：作高斯面 S_1 ，根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = 0 \quad \therefore E = 0$$

对于球面外部：作高斯面 S_2 ，根据高斯定理

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \therefore E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

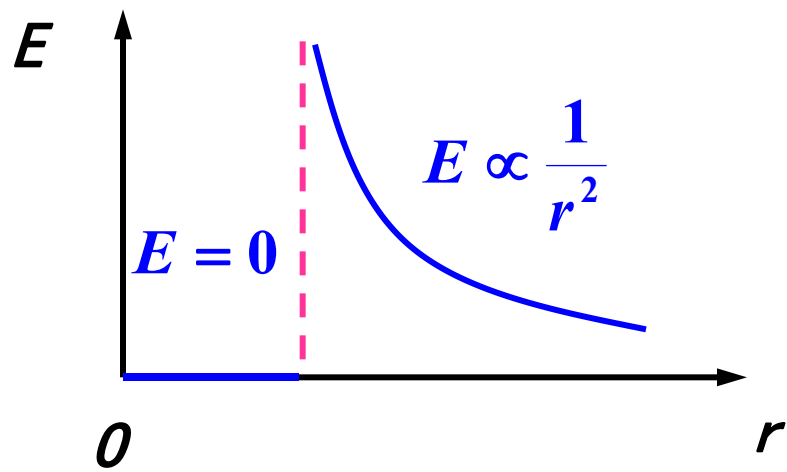
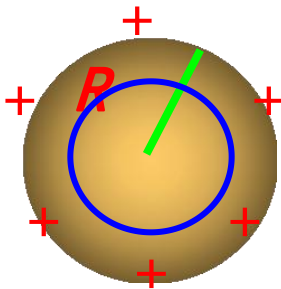
对球面内一点:

$$r < R \quad \sum_i q_i = 0$$

$$E = 0$$

$$r > R$$

$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$



电场分布曲线